Solitonの分散関係

—— collective approach ——

東理大工　唐島照介・中島 滉

§1. まえがき

プラズマや結晶格子内のsolitonの振舞については多くの議論がなされているが，soliton と構成粒子間の相互作用及び粒子間の相互作用と分散関係との関連などが明確でないように思われる。集団運動に関する便利な量子論による方法がTomonaga[(1)]によって提案されている。それによると古典的な連続体の運動の中に集団変数を求め，各粒子に集団的「変位」を生じさせる演算子を決める事が可能である。我々は soliton を粒子系の集団励起と見なし，その振舞を集団運動の観点から記述することを試みる。連続体の波動方程式にある種の非線形項を導入すると「圧縮をあらわす量」$n(x, t)$ について Korteweg-de Vries 方程式が導かれることが知られている。[(2)] このKdV 方程式の孤立波の解を基礎にして集団運動の演算子を作り soliton の分散関係などを導出する。

§2. soliton の座標と運動量

上に述べたKdV方程式の孤立波の解（座標原点を波の中心に選ぶ）は良く知られるように

$$n(x, t) = a\,\mathrm{sech}^2 kx \tag{1}$$

と表わされる。我々は境界を持たない粒子系を考え，簡単のために体積は1と仮定する。更に全粒子数をNで表わす。上の解を Fourier 展開し集団座標として

$$\xi_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{N}\sum_{n,q} G(q, \boldsymbol{k})\, e^{iqx_n} \tag{2}$$

を考える。ここに

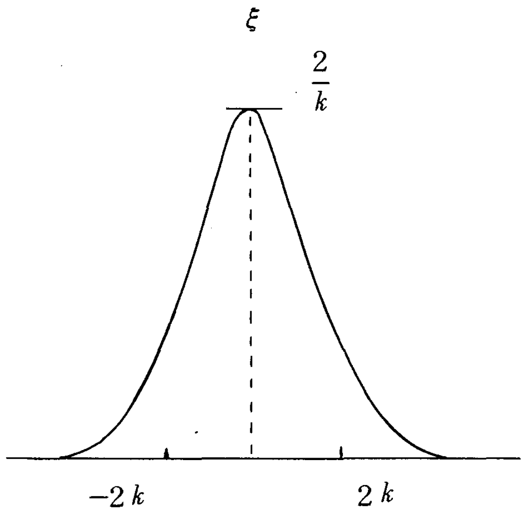
$$G(q, \boldsymbol{k}) = \frac{q\pi}{k^2 \sinh \dfrac{q\pi}{2k}} \tag{3}$$

であり図－1に示すような関数である。これは$k \to 0$では鋭いピークとなりδ－関数的

に振舞うことが注目される。ξ の意味を考えるには密度のゆらぎ $\rho_k = 1/N \sum_n e^{ikx_n}$ と比較してみる。solitonの座標を表示した $\xi_{\boldsymbol{k}}$ は単なる密度のゆらぎではなく $G(q, \boldsymbol{k})$ なる重みがついているのが特徴である。

次に交換関係

$$[\pi_{\boldsymbol{k}}, \xi_{\boldsymbol{k}}] = -i\hbar \tag{4}$$



図−1　$\xi_{\boldsymbol{k}} = 1/N \sum_{n,q} G(q, k)\, e^{iqx_n}$

を満す $\xi_{\boldsymbol{k}}$ に正準共役な運動量 $\pi_{\boldsymbol{k}}$ を $\pi_{\boldsymbol{k}} \propto \dot{\xi}_{\boldsymbol{k}}$ なる関係を考慮して求めると

$$\pi_{\boldsymbol{k}} = \frac{-i\hbar}{\gamma(k)} \sum_{n,q} q\, G(q, k)\, e^{-iqx_n} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{5}$$

を得るが更にこれを対称化したものを用いる方が便利である：

$$\pi_{\boldsymbol{k}} = \frac{-i\hbar}{\gamma(k)} \sum_{n,q} q\, G(q, k)\, e^{-iqx_n} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{q}{2}\right), \tag{6}$$

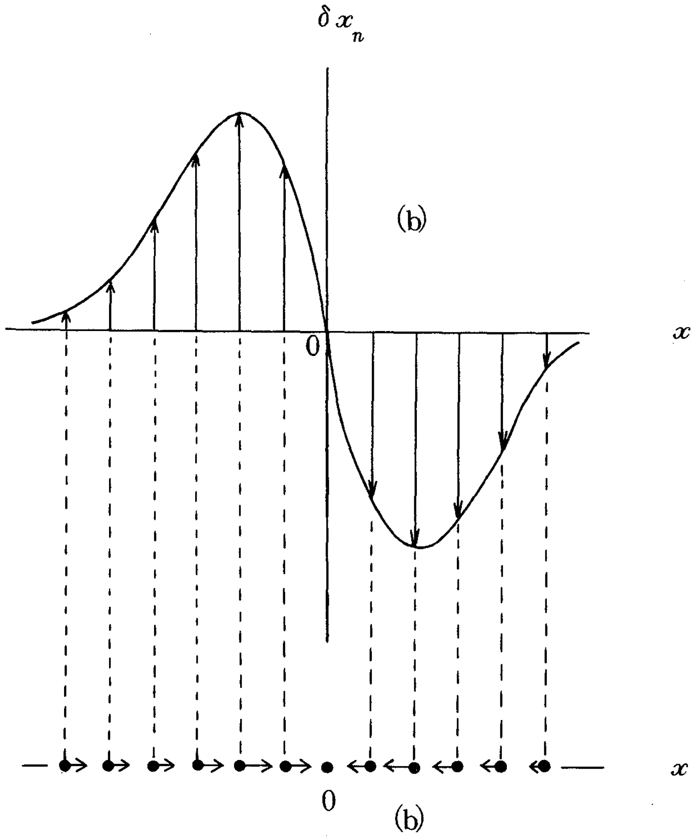
$$\gamma_{\boldsymbol{k}} = \sum_q \frac{q^4 \pi^2}{k^4 \sinh^2 \frac{q\pi}{2k}} \tag{7}$$

$\pi_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} = \pi_{\boldsymbol{k}}$　（† はHermit 共役）.

このようにして得られた soliton の運動量 $\pi_{\boldsymbol{k}}$ が各粒子に如何なる変位 δx_n を生じさせる演算子であるかを考えておこう。

$$\delta x_n = i\epsilon\, [\pi_k/\hbar, x_n] = \epsilon\,(-2k\,\mathrm{sech}^2 kx_n \tanh kx_n) \tag{8}$$

を得るが横軸に x，縦軸に δx をとって各粒子の変位を表わしたものが図−2(a)である。(b)には直線上等間隔に分布した粒子に集団運動量 $\pi_{\boldsymbol{k}}$ がどのような変位を起こさせるか，つまり soliton がどのように生成されるかが模式的に示されている。



図－２(a) (b)　　変位と soliton の生成図

§3. 集団運動と内部運動の分離

Tomonaga の方法に従って集団運動と内部運動を分離するのであるが，我々の場合には soliton の中心に座標原点が置かれていることに注意する必要がある。粒子間の相互作用が $V(|\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_{n'}|)$ なる二体力のみを取扱う限り，Galilei 変換

$$x=S^{\dagger}x_0S=x_0-vt \qquad (v:\ \text{soliton の速度}), \tag{9}$$

$$P=S^{\dagger}P_0S=P_0-mv, \tag{10}$$

$$S=e^{\Sigma iv(P_0t-mx_0)}, \tag{11}$$

により Hamiltonian $H=T+V$ は不変であり Schrödinger 関数 ψ_0 は $\psi=S^{\dagger}\psi_0$ と変換される。 soliton の運動エネルギー T_s を

$$T_s = \frac{1}{2I} \pi_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \pi_{\boldsymbol{k}} \tag{12}$$

の形に表わし内部運動の運動エネルギー T_{in} を

$$T_{in} = T - T_s \tag{13}$$

と置く。T_{in} の中にはもはや π を含まないと考えると $[T_{in}, \xi_{\boldsymbol{k}}] = 0$ である。

$$[T, \xi_{\boldsymbol{k}}] = -i\hbar \frac{\gamma(k)}{mN} \pi_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \tag{14}$$

に注意すると

$$I = \frac{mN}{\gamma(k)} \tag{15}$$

と求まり

$$T_s = \frac{\gamma(k)}{2mN} \pi_k^{\dagger} \pi_{\boldsymbol{k}} \tag{16}$$

$$T_{in} = -\frac{\hbar^2}{2mN} \sum_n \nabla_n^2 - \frac{\hbar^2}{2mN} \sum_{q,n} q G(q, k)$$
$$\times \left[e^{iqx_n} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{q}{2} \right) \right] \left[e^{-iqx_n} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{q}{2} \right) \right] \tag{17}$$

が得られる。次にポテンシャルエネルギー V を分離すると

$$V = V^{(0)} + \sum_k V_k^{(1)} \xi_k + \sum_k V_k^{(2)} \xi_k^{\dagger} \xi_k \tag{18}$$

と展開し Tomonaga (trick) を用い $V^{(0)}$, $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ を求める。$V_k^{(2)}$ のみを書くと

$$V_k^{(2)} = \frac{N^2}{2} \sum_q \frac{q^6 \pi^2 V(q)}{k^4 \gamma(k)^2 \sinh^2 \frac{q\pi}{2k}} \tag{19}$$

T_{in} の中には $\pi_{\boldsymbol{k}}$ は含まないが $\xi_{\boldsymbol{k}}$ は存在する。$\xi_{\boldsymbol{k}}$ に存在する部分を上と全く同様に分離すると

$$T_{in} = T^{(0)} + \sum_k T_k^{(1)} \xi_k + \sum_k T_k^{(2)} \xi_k^{\dagger} \xi_k \tag{20}$$

$$T_k^{(2)}=\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{q,q',n}\frac{q'^2\pi}{k^2\gamma(k)\sinh\frac{q'\pi}{2k}}\frac{q^3\pi}{k^2\gamma(k)\sinh\frac{q\pi}{2k}}e^{i(q-q')x_n}$$
$$\times\left\{(q+2q')\left(-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2+(q^2+qq'-2q'^2)\left(-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{q^3}{4}-\frac{qq'^2}{2}+\frac{q'^3}{2}\right)\right\} \tag{21}$$

こうして Hamiltonian は

$$H=(T^{(0)}+V^{(0)})+\sum_k(T_k^{(1)}+V_k^{(1)})\xi_k+\sum_k(T_k^{(2)}+V_k^{(2)})\xi_k^\dagger\xi_k+T_s \tag{22}$$

と分離される。第一項は集団変数を全く含まない内部運動の部分であり，第三項及び第四項は soliton のエネルギーを表す。第二項は soliton と内部運動の相互作用項である。

§ 4. soliton の分散関係

我々は式(21)において簡単のために $q\neq q'$ の場合は $q=q'$ のときに比較して無視する。又系はほとんど縮退したフェルミ気体の場合に限る。更に我々は系を一次元であると仮定する。$\xi_k\psi$ は k が十分に小さい限りフェルミ球の表面近くの粒子のみが励起されると考えられる。P_x^2 はフェルミ $Max.$ の値 $[P_x^2]_{F.M.}$ で置き換えることが可能となり又 $\sum_n^{F.M.}[P_x^2]$ は次のようになる：

$$\sum_n^{vp\ to F.M.}[(P_x/\hbar)^2]=\frac{N}{3}[(P_x/\hbar)^2]_{F.M.}=\pi^2N^3 \tag{23}$$

従って式(21)は次のような結果になる：

$$T_k^{(2)}=\frac{\hbar^2}{2}\sum_q\frac{q^6\pi^2}{k^4\gamma(k)^2\sinh^2\frac{q\pi}{2k}}\left(\frac{\pi^2N^3}{m}+\frac{q^2N}{4m}\right) \tag{24}$$

式(16), (18), (19), (20)及び(24)より soliton の Hamiltonian は次のように書ける。

$$H_s=\frac{\gamma(k)}{2mN}\pi_k^\dagger\pi_k+\frac{1}{2}\sum_q\frac{q^6\pi^2}{k^4\gamma(k)^2\sinh^2\frac{8\pi}{2k}}$$

$$\times\left[[N^2V(q)+\hbar^2\left(\frac{\pi^2N^3}{m}+\frac{q^2N}{4m}\right)\right]\xi_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\,\xi_{\boldsymbol{k}} \tag{25}$$

これ等の結果より soliton の分散関係は次のように得られる。

$$\omega(k)^2=\frac{1}{mN}\sum_q\frac{q^6\pi^2}{k^4\gamma(k)\sinh^2\dfrac{q\pi}{2k}}\times\left[N^2V(q)+\hbar^2\left(\frac{\pi^2N^3}{m}+\frac{q^2N}{4m}\right)\right] \tag{26}$$

特に Coulomb 相互作用の場合には

$$\omega(k)^2=\frac{1}{mN}\left[4\pi Ne^2+\frac{6\,!\,\xi(6)}{4\,!\,\xi(4)}\hbar^2\left|\frac{N^3}{m}k^2+\frac{N}{4\pi^4m}\;\frac{8\,!\,\xi(8)}{6\,!\,\xi(6)}k^4\right|\right] \tag{27}$$

となりほとんど縮退したフェルミ系の solitonは k が小さい所では phonon excitation とほとんど区別出来ないように思われる。

次にプラズマ中のイオンの場合のように遮蔽効果が考慮されるような場合には Screeing ポテンシャル $V(q)=4\pi e^2/(q^2+q_c^2)$ （ $q\to k$ ）を用いて

$$\omega(k)^2=\frac{1}{mN}\left[4\pi e^2N^2\frac{k^2}{k_c^2}\left(1-\frac{k^2}{2k_c^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{6\,!\,\xi(6)}{4\,!\,\xi(4)}\hbar^2\left|\frac{N^3}{m}k^2+\frac{N}{4\pi^4m}\;\frac{8\,!\,\xi(8)}{6\,!\,\xi(6)}k^4\right|\right] \tag{28}$$

次に solitonと内部運動の相互作用は次のように書ける

$$H_{int}=\sum_{n,q}\frac{\pi q}{k^2\gamma(k)\sinh\dfrac{q\pi}{2k}}$$

$$\left[\frac{\hbar^2\pi^2N^2q^2}{m}+\frac{\hbar^2q^2}{4m}+NV(q)\,q^2-\left\{\frac{5\hbar^2N^2\xi(6)}{m\pi^4\xi(4)}k^2+\frac{420\hbar^2\xi(8)}{m\pi^4\xi(4)}k^8\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{q'}\frac{\pi^2q'^6}{k^4\gamma(k)\sinh^2\dfrac{q'\pi}{2k}}NV(q')\right\}\right]e^{iqx_n}\,\xi_{\boldsymbol{k}} \tag{29}$$

この項はsoliton が崩壊するメカニズムを決めるものである。これより運動方程式を作る事が出来，その内容を調べる事が出来る。

References

(1) S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **13** (1955), 467, 482.

(2) 戸田盛和，振動論（培風館） 191.